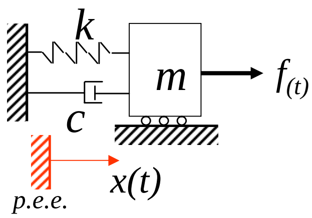
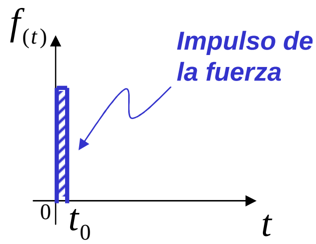
Resp. forzada: Excitación impulsiva (i)





$$\hat{f} = \int_0^{t_0} f_{(t)}\, dt$$

Hipótesis:

- Fuerzas impulsivas tienen una magnitud muy grande (*infinita*) y actúan durante un intervalo de tiempo muy pequeño (*instantáneas*)
- La posición del sistema no cambia durante la aplicación de la fuerza impulsiva debido a que la misma es casi instantánea
- Condiciones iniciales son: $x_{(t=0)} = x_0$, $\dot{x}_{(t=0)} = v_0$
- A partir del tiempo t_0 el sistema responde libremente

Ec. de movimiento: $$\ddot{x}_{(t)} + 2\zeta\omega_n \dot{x}_{(t)} + \omega_n^2 x_{(t)} = f_{(t)}/m$$

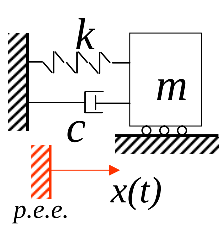
Integrando: $$\int_0^{t_0} \ddot{x}_{(t)} dt + \int_0^{t_0} 2\zeta\omega_n \dot{x}_{(t)} dt + \int_0^{t_0} x_{(t)} dt = \int_0^{t_0} f_{(t)}/m \, dt$$

Se obtienen las siguientes cond. al tiempo t_0:

$$x_{(t_0)} = x_0$$
$$\dot{x}_{(t_0)} = \hat{f}/m + v_0$$

Resp. forzada: Excitación impulsiva (ii)

La aplicación de un impulso se traduce en la imposición de condiciones iniciales a partir del tiempo t_0, por lo cual el sistema responde libremente. Luego, redefiniendo el tiempo t_0 como el nuevo tiempo 0 tenemos:



***Ec. de movimiento*:** $$\ddot{x}_{(t)} + 2\zeta\omega_n \dot{x}_{(t)} + \omega_n^2 x_{(t)} = 0$$

***Condiciones iniciales*:** $$\begin{cases} x_{(t_0)} = x_{(0)} = x_0 \\ \dot{x}_{(t_0)} = \dot{x}_{(0)} = \hat{f}/m + v_0 \end{cases}$$

***Solución*:** $$x_{(t)} = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A_1 Cos(\omega_d t) + A_2 Sen(\omega_d t)\right]$$

$$\begin{aligned} x_{(0)} &= x_0 \\ \dot{x}_{(0)} &= \hat{f}/m + v_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \dfrac{\hat{f}}{m\omega_d} + \dfrac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

$$x_{(t)} = \frac{\hat{f}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} Sen(\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 Cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} Sen(\omega_d t)\right]$$

Resp. forzada: Excitación impulsiva (iii)

Respuesta a partir del tiempo t_0:

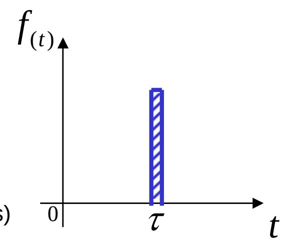
$$x_{(t)} = \underbrace{\hat{f}\, h_{(t)}}_{\text{Resp. debida al impulso}} + \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 Cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} Sen(\omega_d t)\right]}_{\text{Resp. debida a las condiciones iniciales}} \qquad t > t_0$$

Función respuesta impulsiva unitaria : (amortiguada) $\quad h_{(t)} = \dfrac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} Sen(\omega_d t)$

Función respuesta impulsiva unitaria : (no-amortiguada) $\quad h_{(t)} = \dfrac{1}{m\omega_n} Sen(\omega_n t)$

Si las cond. iniciales son nulas, *i.e.*: $x_{(t=0)} = \dot{x}_{(t=0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{(t)} = \hat{f}\, h_{(t)} \qquad t > t_0$

Si la fuerza impulsiva se aplica en el tiempo τ (cond. inic. nulas)

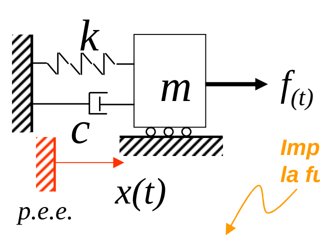


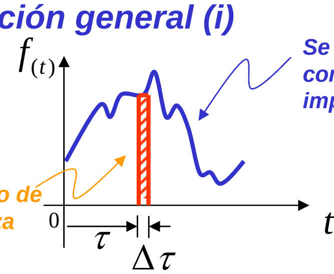
$\Rightarrow \quad x_{(t)} = \hat{f}\, h_{(t-\tau)} \qquad t > \tau$

Universidad Simón Bolívar
MC-2415 Vibraciones Mecánicas

I. Introducción
II. Sistema de 1-GDL
Descripción
Ec. de movimiento
Resp. libre
Resp. forzada
Fuerza constante
Armónica simple
Excitación periódica
Excitación impulsiva
Excitación general
III. Sistemas de *N*-GDL
IV. Medición / diagnóstico
V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación general (i)





Impulso de la fuerza

Se puede considerar como una colección de impulsos

La respuesta del sistema es la suma de las respuestas de los impulsos

$$x_{(t)} = \sum f_{(\tau)}\Delta\tau\, h_{(t-\tau)} \; + \; \textit{Resp. debida a las cond. iniciales}$$

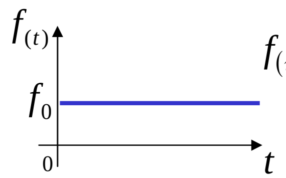
Límite $\Delta\tau \to 0$

$$x_{(t)} = \underbrace{\int_0^t f_{(\tau)} h_{(t-\tau)} d\tau}_{\substack{\text{Resp. debida a la excitación} \\ \text{(Integral de Duhamel)}}} + \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 Cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} Sen(\omega_d t)\right]}_{\text{Resp. debida a condiciones iniciales}}$$

Si las cond. iniciales son nulas, *i.e.*: $x_{(t=0)} = \dot{x}_{(t=0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{(t)} = \int_0^t f_{(\tau)} h_{(t-\tau)} d\tau$

Resp. forzada: Excitación general (ii)

Escalón infinito
(cond. iniciales son nulas)



$$f_{(\tau)} = f_0 \qquad \tau > 0$$

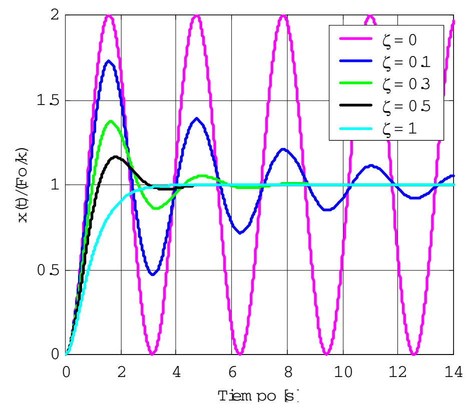
$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(Cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sen(\omega_d t)\right)\right] \qquad t > 0$$

⬇

$$\zeta = 0$$

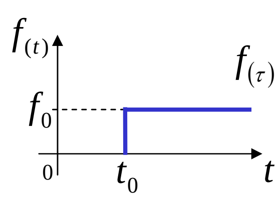
⬇

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[1 - Cos(\omega_n t)\right]$$



Resp. forzada: Excitación general (iii)

Escalón infinito desplazado
(cond. iniciales son nulas)



$$f_{(\tau)} = \begin{cases} 0 & 0 < \tau \le t_0 \\ f_0 & \tau > t_0 \end{cases}$$

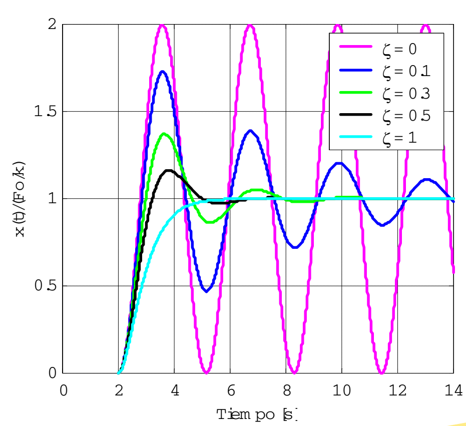
$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n (t-t_0)}\left(Cos(\omega_d (t-t_0)) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} Sen(\omega_d (t-t_0))\right)\right] \qquad t > t_0$$

⬇

$$\zeta = 0$$

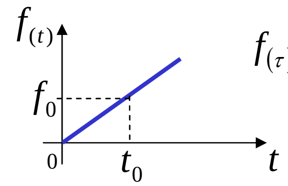
⬇

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[1 - Cos(\omega_n (t-t_0))\right]$$



Resp. forzada: Excitación general (iv)

Rampa infinita
(cond. iniciales son nulas)

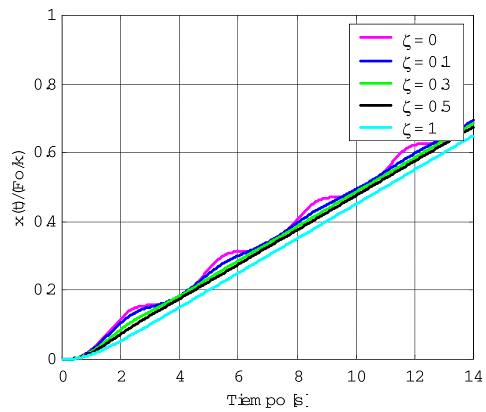


$$f_{(\tau)} = \frac{f_0}{t_0}\tau \qquad \tau > 0$$

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k\,t_0\omega_n}\left[-2\zeta + \omega_n t + e^{-\zeta\omega_n t}\left(2\zeta\,Cos(\omega_d t) + \frac{\omega_n}{\omega_d}(2\zeta^2 - 1)Sen(\omega_d t)\right)\right] \qquad t > 0$$

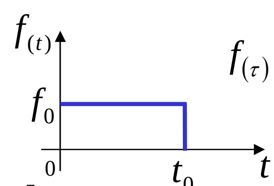
$$\zeta = 0$$

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k\,t_0\omega_n}\left[\omega_n t - Sen(\omega_n t)\right]$$



Resp. forzada: Excitación general (v)

Escalón finito
(cond. iniciales son nulas)



$$f_{(\tau)} = \begin{cases} f_0 & 0 < \tau \le t_0 \\ 0 & \tau > t_0 \end{cases}$$

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(Cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}Sen(\omega_d t)\right)\right] \qquad 0 < t \le t_0$$

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}\left(Cos(\omega_d(t-t_0)) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}Sen(\omega_d(t-t_0))\right) - e^{-\zeta\omega_n t}\left(Cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}Sen(\omega_d t)\right)\right] \qquad t > 0$$

$$\zeta = 0$$

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[1 - Cos(\omega_n t)\right] \qquad 0 < t \le t_0$$

$$x_{(t)} = \frac{f_0}{k}\left[Cos(\omega_n(t - t_0)) - Cos(\omega_n t)\right] \qquad t > 0$$